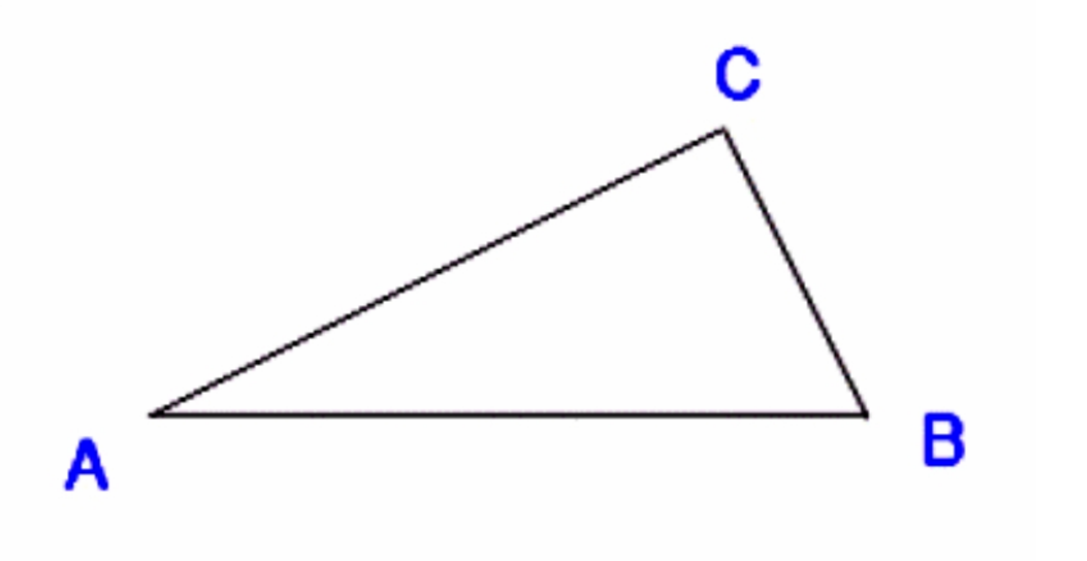
Istituto Comprensivo di Ponzano V.to (TV)

Scuola Media anno scolastico 2010 / 2011

IL TRIANGOLO RETTANGOLO

Di: Francesco Campobasso 2°D

Come già sappiamo, il triangolo rettangolo è un poligono di 3 lati.
Due di questi lati sono perpendicolari tra loro e pertanto individuano un angolo retto.
I lati che individuano l'angolo retto prendono il nome di cateti.
Il terzo lato che unisce gli estremi liberi dei cateti prende il nome di ipotenusa.
Il triangolo rettangolo gode di una proprietà particolare, infatti se l'ipotenusa viene considerata il diametro di un cerchio il vertice opposto (l'angolo retto) sarà tangente alla circonferenza.
Un triangolo rettangolo può essere sempre inscrivibile in una circonferenza.
Il diametro di questa semicirconferenza rappresenta l'ipotenusa.



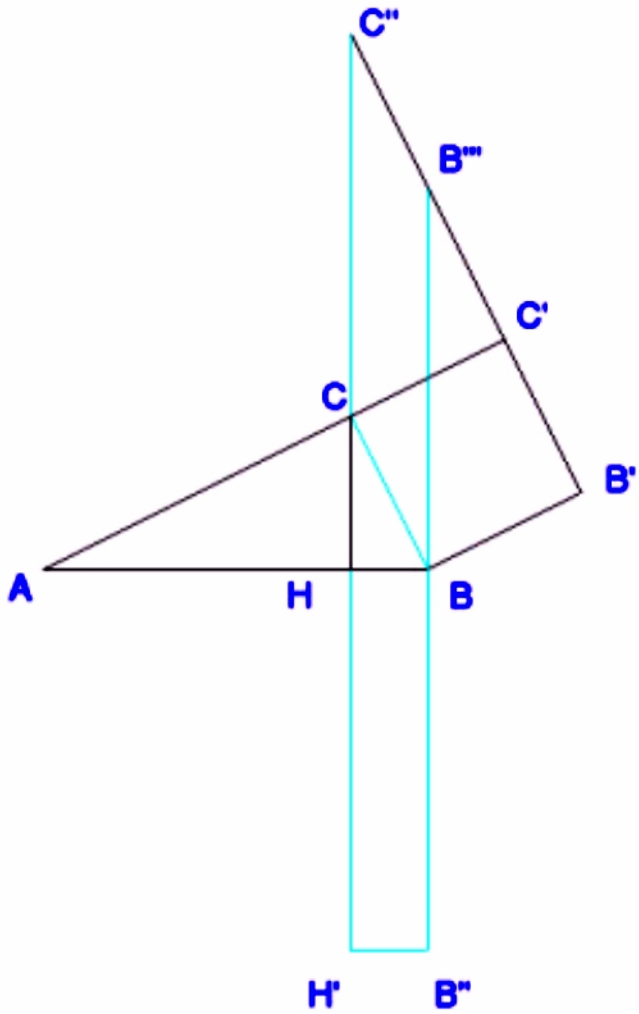
I cateti e l'ipotenusa sono legati da relazioni matematiche e geometriche che vengono dimostrate attraverso i teoremi.
I teoremi che ci interessano per tutte le applicazioni pratiche sono tre:

1° TEOREMA di EUCLIDE
2° TEOREMA di EUCLIDE
TEOREMA di PITAGORA

Questi teoremi risultano fondamentali nel disegno e nel calcolo delle misure dei "pezzi della barca".
Tramite il teorema di Pitagora riusciamo a determinare le lunghezze dei segmenti obliqui di cui conosciamo le coordinate dei vertici.

Anche le formule della geometria analitica e dell'equazione della retta sono legate al teorema di Pitagora.

1° TEOREMA DI EUCLIDE



Il triangolo ABC è congruente al triangolo CC'C'' perché sono entrambi retti e hanno il cateto CB congruente al cateto al cateto CC' poiché, per costruzione, il quadrilatero BB'C'C è un quadrato.

L'angolo CBA è congruente all'angolo C''CC' poiché sono entrambi complementari di umo stesso angolo, infatti l'angolo CBB'''è congruente all'angolo CC''B''' in quanto angoli opposti di un parallelogramma.

Angolo ABC + angolo CBB'''=90

Angolo C'CC'' + angolo CC''C'=90°

Angolo ABC + CAB=90°, angolo CAB = angolo CC''C'

Angolo ABC = angolo C'CC'', angolo CC'C''= angolo ACB=90°

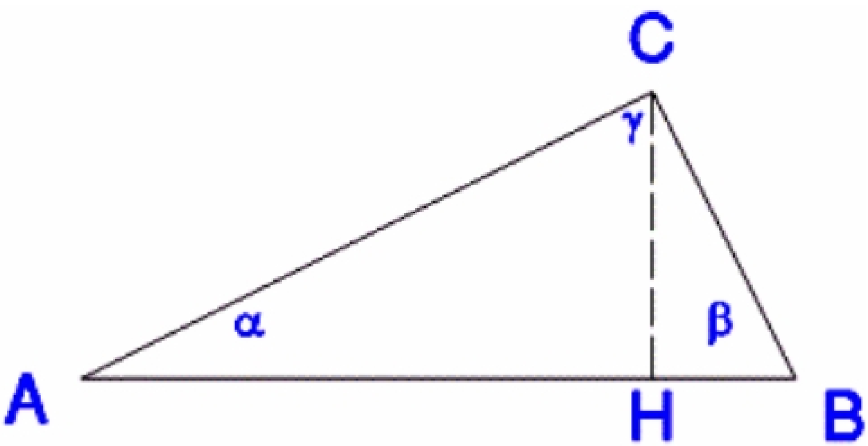
Il triangolo CC'C'' è congruente al triangolo ABC poiché hanno gli angoli corrispondenti congruenti e un lato congruente (CB = CC')

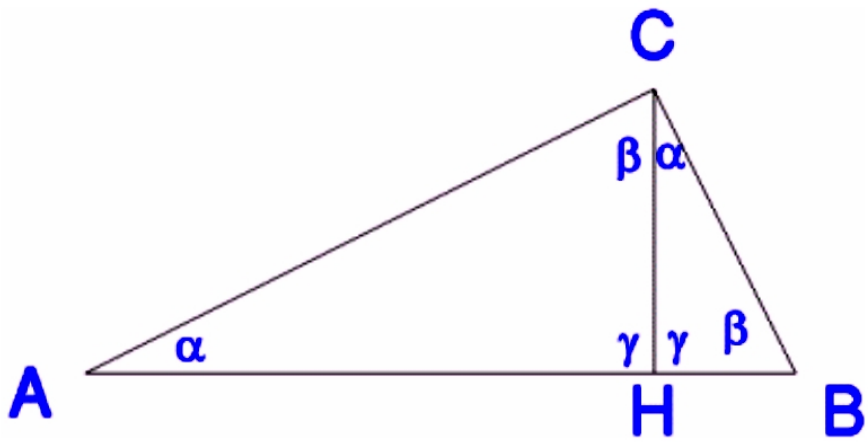
CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

2 triangoli si definiscono congruenti se:
a)hanno 2 angoli congruenti e il lato compreso tra questi 2 angoli
b)hanno 2 lati congruenti e l'angolo che questi lati formano
c)se hanno i tre lati congruenti

quando 2 triangoli sono congruenti hanno congruenti tutti i lati corrispondenti e hanno congruenti tutti gli angoli corrispondenti
per quanto riguarda i triangoli rettangoli possiamo dire che 2 triangoli sono congruenti se hanno congruente l'ipotenusa e un angolo acuto.
Una caratteristica di tutti i triangoli è che la somma degli angoli interni è sempre 180°.
In un triangolo rettangolo la somma dei 2 angoli acuti è sempre 90°.
Per questa ragione si dice che gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono sempre complementari.

Si definiscono complementari 2 angoli la cui somma sia 90°.





Il triangolo AHC e il triangolo CHB non sono congruenti, come si può notare dal disegno.
Questi 2 triangoli hanno però gli angoli corrispondenti congruenti.
Questi 2 triangoli sono simili.

Si definiscono simili 2 triangoli aventi gli angoli corrispondenti congruenti

FIGURE SIMILI

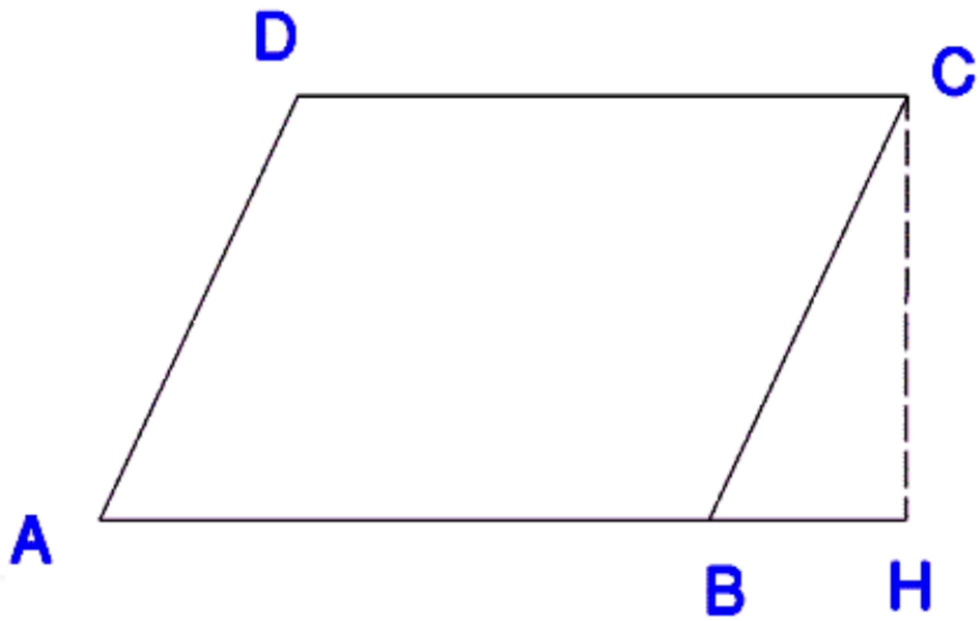
Due poligoni simili hanno sempre gli angoli corrispondenti congruenti.
Due poligoni simili si "assomigliano" e pertanto un'altra caratteristica che devono per forza possedere è che il rapporto tra i lati corrispondenti è costante.

Due poligoni simili hanno gli angoli corrispondenti congruenti
Due poligoni simili hanno il rapporto tra i lati corrispondenti costante

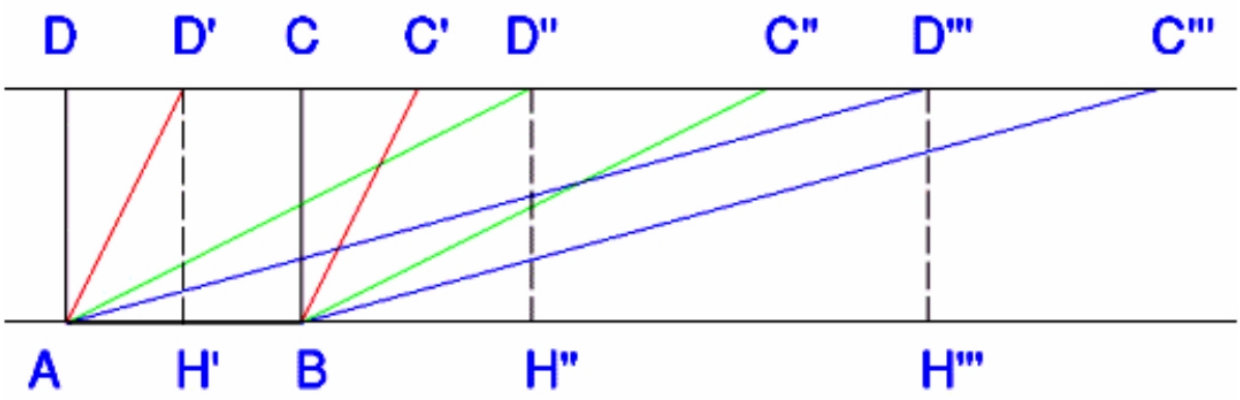
Una caratteristica di tutti i poligoni è quella che la somma degli angoli interni corrisponde alla somma di tanti angoli piatti quanti sono i lati meno 2.
Per il triangolo rettangolo i lati sono 3 per tanto la somma degli angoli interni sarà:
somma angoli interni triangolo =180° x (3-2)= 180°x 1= 180

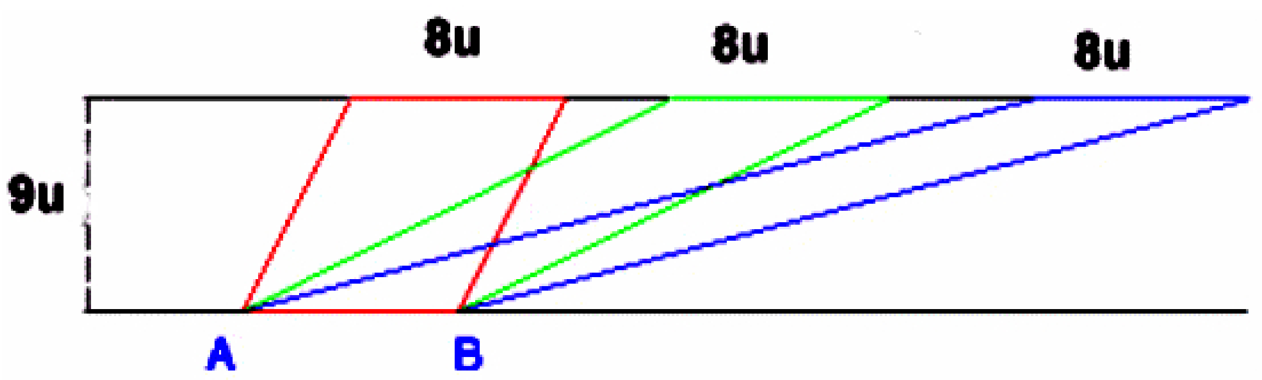
PARALLELOGRAMMI

I parallelogrammi sono quadrilateri aventi i lati opposti paralleli e congruenti, di conseguenza i parallelogrammi hanno i lati 2 a 2 congruenti.



L’area di un parallelogramma si calcola moltiplicando tra loro la base e l’altezza.
Di conseguenza, tutti i parallelogrammi che hanno la stessa base e la stessa altezza avranno anche la stessa area.

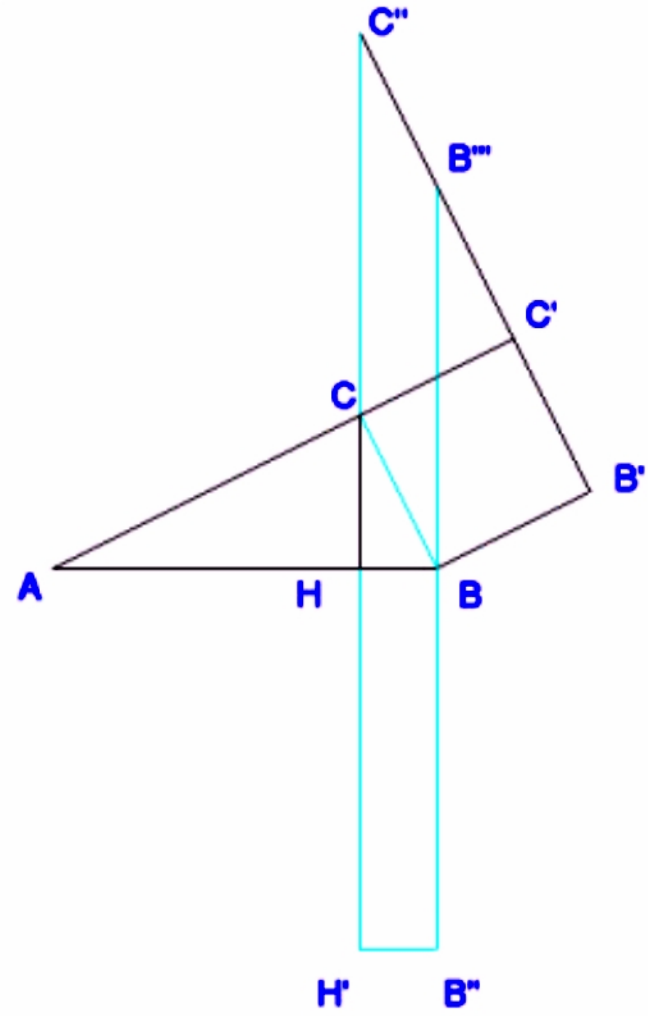




Tutti i parallelogrammi che sono stati disegnati hanno la stessa area anche se appaiono molto diversi.
Tutti i parallelogrammi che sono stati disegnati hanno la stessa base (AB) e la stessa altezza perché sono racchiusi tra le stesse rette parallele
(2 rette parallele mantengono costante la loro distanza.
Tale distanza è l’altezza di tutti i nostri parallelogrammi)

Due parallelogrammi, anche se molto diversi, che abbiano la stessa base e la stessa altezza avranno anche la stessa area.
Due parallelogrammi racchiusi tra le stesse rette parallele hanno sempre la stessa altezza.

1° TEOREMA DI EUCLIDE



Abbiamo dimostrato che il triangolo ABC è uguale al triangolo CC'C'' per tanto l'ipotenusa AB è congruente all'ipotenusa CC''
Per costruzione il lato BB' del rettangolo R è congruente all'ipotenusa AB
Il rettangolo R e il parallelogramma P hanno le basi BB' e B B''' che sono congruenti.
Il parallelogramma P e il rettangolo R sono equivalenti (hanno la stessa area poiché hanno basi congruenti e la stessa altezza.
Si consideri ora il quadrato Q e il parallelogramma P
Sono anch'essi equivalenti (hanno la stessa area) perché hanno la base CB in comune e la stessa altezza BB''
Considerando le aree possiamo scrivere che P = R P = Q
Per la proprietà transitiva R = P = Q R = Q
Per la proprietà transitiva il rettangolo R è equivalente al quadrato Q in quanto sono entrambi equivalenti al parallelogramma P

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE (Enunciato)

Il quadrato costruito sul cateto di un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo avente come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa

In pratica l'area del quadrato Q è il quadrato CB Q=CB^2
L'rea del rettangolo R è data dal prodotto dell'ipotenusa x HB
AB = BB'
R = BB' x BH

Da quanto è emerso possiamo ricavare le seguenti formule applicabili a qualsiasi triangolo rettangolo.

$$AB = \frac{CB^2}{BH} \qquad AH = \frac{CA^2}{AB}$$

$$AB = \frac{CA^2}{AH} \qquad BH = \frac{CB^2}{AB}$$

$$CA^2 = AB \bullet AH \qquad CB = \sqrt{AB \bullet BH}$$

$$CB^2 = AB \bullet HB \qquad CA = \sqrt{AB \bullet AH}$$

TEOREMA DI PITAGORA

Dal 1° teorema di Euclide sappiamo che Q' è equivalente a R' e allo stesso modo Q'' è equivalente alla somma di R'+ R''.
Se consideriamo la somma di Q' con Q'' possiamo dire che è equivalente alla somma di R' + R''
Dal disegno possiamo notare ce R' + R'' è in realtà un quadrato avente come lato l'ipotenusa AB
Grazie al primo teorema di Euclide possiamo dimostrare ed enunciare il teorema di Pitagora.

La somma dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa

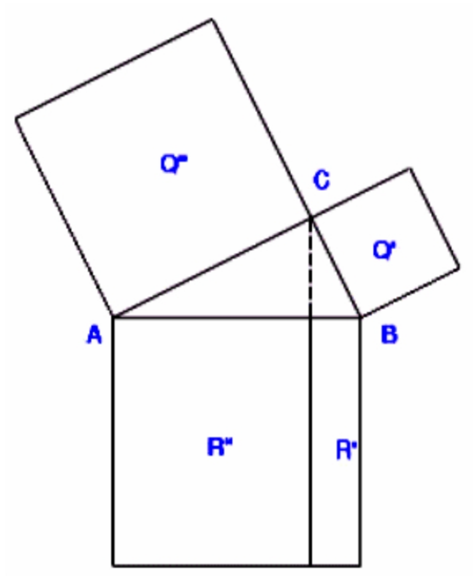
$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

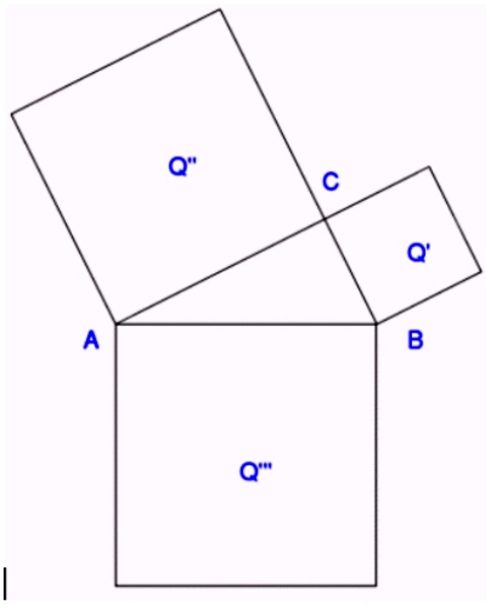
$$CB^2 + CA^2 = AB^2$$

$$AB = \sqrt{CB^2 + CA^2}$$

$$CB = \sqrt{AB^2 - CA^2}$$

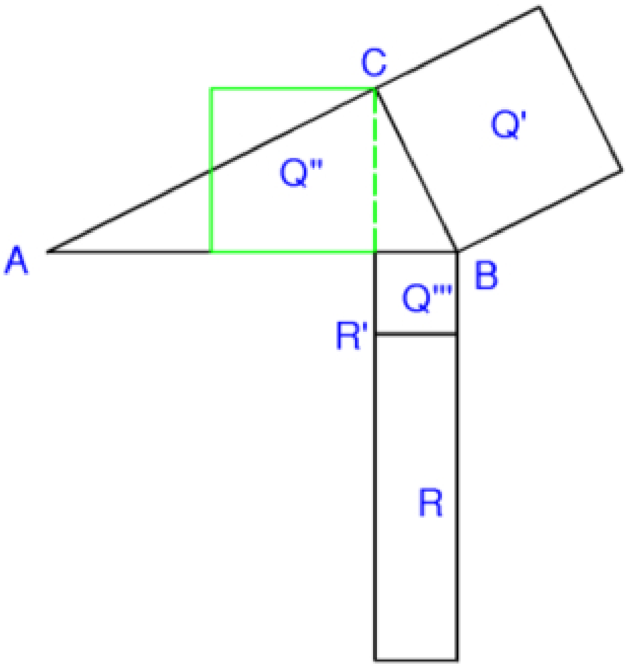
$$CA = \sqrt{AB^2 - CB}^{2}$$





SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull’altezza relativa all’ipotenusa è equivalente (stessa area) al rettangolo avente come dimensioni le 2 proiezioni dei cateti.



Dal primo teorema di Euclide applicato al triangolo ABC rettangolo in C possiamo dire che il quadrato Q’ costruito su CB è equivalente al rettangolo R’ avente come dimensioni l’ipotenusa e la proiezione di CB sull’ipotenusa.

Considerando il triangolo rettangolo HBC, rettangolo in H possiamo dire che la somma dei quadrati costruiti sui suoi cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.
Questo significa che

Q'' + Q'''= Q'

e significa inoltre che

R' = Q''' + R

Sapendo che

Q'= R'

Q'= Q''+ Q'''

Q' = Q'''+ R

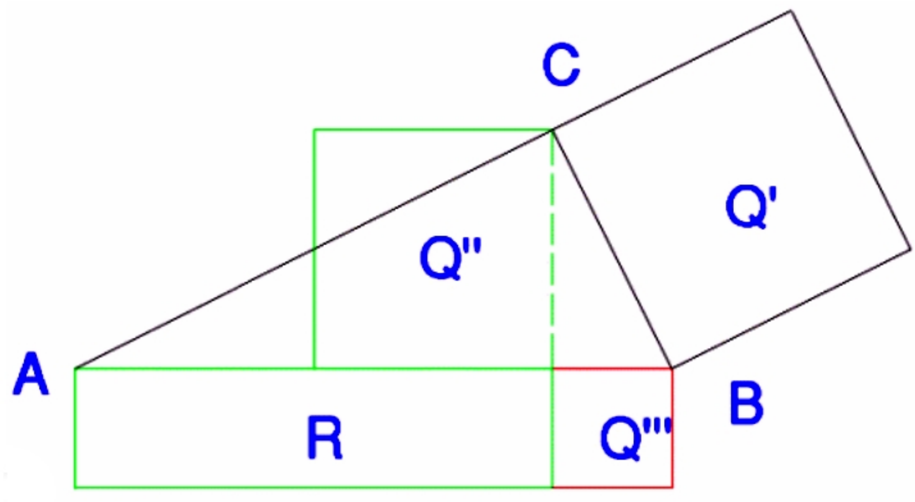
Possiamo dire che

Q''+ Q'''= R + Q'''

Questa eguaglianza è verificata se, e solamente se R e Q'' sono equivalenti

Q'' = R

Se osserviamo il rettangolo R possiamo notare che le sue dimensioni sono uguali alle proiezioni dei 2 cateti sull'ipotenusa.
Possiamo perciò dire che il quadrato Q'', costruito sull'altezza CH di un triangolo rettangolo ABC rettangolo in C, è equivalente al rettangolo R avente come dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.



R'

R'= Q'''+ R

R'= Q'= Q'''+ R

Q''+ Q'''= Q'= Q'''+ R

Q''= R

$$CH^2 = HB \cdot AH$$

$$CH = \sqrt{HB \cdot AH}$$

$$HB = \frac{CH^2}{AH}$$

$$AH = \frac{CH^2}{HB}$$

RICAPITOLANDO

Per dimostrare il primo teorema di Euclide è necessario dimostrare la congruenza dei 2 triangoli rettangoli
Si ricorda che 2 triangoli sono congruenti se:

1) hanno congruenti 2 angoli e il lato comune
2) 2 lati e l'angolo comune
3) I 3 lati

Si ricorda inoltre che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180°.
Si ricorda che i 2 angoli acuti di un triangolo rettangolo sono sempre complementari, cioè la loro somma è sempre 90°.
Si ricorda inoltre che l'area di un parallelogramma si calcola sempre moltiplicando la base per l'altezza.
Tutti i parallelogrammi aventi la stessa base e compresi dentro le stesse rette parallele (ossia che hanno la stessa altezza) hanno tutti la stessa area.